# *Προτάσεις που χρησιμοποιούνται στη λύση ασκήσεων και χρειάζονται απόδειξη*

## Πρόταση 1

Έστω η συνάρτηση $f: A \to R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα
Να δείξετε ότι
**α)** η f αντιστρέφεται
**β)** η $f^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο f(A)
**γ)** Οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες στο σύνολο $A \cap f(A)$

**Απόδειξη**

**α)** Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1 – 1 η f αντιστρέφεται

**β)** Έστω ότι η $f^{-1}$ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο f(A)
Τότε υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ τέτοια ώστε $y_1 < y_2$ και $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$ και $x_1 \geq x_2$ που είναι άτοπο αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο
Άρα η $f^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο f(A)

**γ)**
**Ευθύ** : Έστω ότι το $x_o \in A \cap f(A)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$

Θα δείξουμε ότι το $x_o$ είναι ρίζα και της εξίσωσης $f(x) = x$ δηλαδή $f(x_o) = x_o$
Είναι $f(x_o) = f^{-1}(x_o)$ (1)

Έστω ότι $f(x_o) \neq x_o \Leftrightarrow f(x_o) < x_o$ ή $f(x_o) > x_o$
Αν $f(x_o) < x_o$ (2) τότε $f^{-1}(f(x_o)) < f^{-1}(x_o) \Leftrightarrow x_o < f^{-1}(x_o)$ από (1) , που είναι άτοπο από τη (2)

Αν $f(x_o) > x_o$ (3) τότε $f^{-1}(f(x_o)) > f^{-1}(x_o) \Leftrightarrow x_o > f^{-1}(x_o)$ από (1) , που είναι άτοπο από τη (3)
Δηλαδή $f(x_o) = x_o$

**Αντίστροφα :**
Έστω ότι το $x_o$ $A \cap f(A)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$ δηλαδή $f(x_o) = x_o$ τότε είναι $x_o = f^{-1}(x_o)$ Οπότε $f(x_o) = f^{-1}(x_o)$

Οι δοσμένες εξισώσεις έχουν τις ίδιες ακριβώς ρίζες , δηλαδή είναι ισοδύναμες

## Πρόταση 2

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη κοντά στο $x_0$. Να αποδείξετε ότι

Αν $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

**Απόδειξη**

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $-\sqrt{f^2(x)} = -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$.

Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ .

## Πρόταση 3

Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα (**θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας**)

**Απόδειξη**

Έστω $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$ και $x \in (-\infty, +\infty)$.

Επειδή $\alpha_\nu \neq 0$ υποθέτουμε ότι $\alpha_\nu > 0$.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$, ως πολυώνυμο.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha_\nu x^\nu) = +\infty$ αφού $\alpha_\nu > 0$ και ν περιττός.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\alpha_\nu x^\nu) = -\infty$ αφού $\alpha_\nu > 0$ και ν περιττός.

Οπότε υπάρχει κ σε περιοχή του $-\infty$ με $f(\kappa) < 0$ και λ σε περιοχή του $+\infty$ με $f(\lambda) > 0$.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\kappa, \lambda]$, $f(\kappa)\, f(\lambda) < 0$ οπότε από το θεώρημα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (\kappa, \lambda) \subseteq (-\infty, +\infty)$ έτσι ώστε $f(\rho) = 0$

## Πρόταση 4

1. Αν f, g συναρτήσεις ορισμένες σε περιοχή του $x_o$ με $f(x) > g(x)$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
2. Αν ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο $x_o$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, τότε είναι $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

**Απόδειξη**

Επειδή $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow g(x) > 0$ σε περιοχή του $x_o$

$f(x) > g(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{g(x)}$ έχουμε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$ και $\lim_{x \to x_0} 0 = 0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ με

$f(x) > 0$ σε περιοχή του $x_o$ οπότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

## Πρόταση 5

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και 1 – 1 σε ένα διάστημα Δ , να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

**Απόδειξη**

Αρκεί να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$
με $\alpha < \beta < \gamma$ θα είναι ή $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$ ή $f(\alpha) > f(\beta) > f(\gamma)$

Έστω ότι για $\alpha < \beta < \gamma$ είναι $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha ,\beta]$
Είναι $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και $f(\gamma) \in (f(\alpha) , f(\beta))$ από την (1)

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον
$x_o \in (\alpha ,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = f(\gamma)$ Επειδή η f είναι 1 – 1 θα είναι $x_o = \gamma$
Οπότε $\gamma \in (\alpha ,\beta)$ που είναι άτοπο αφού $\alpha < \beta < \gamma$ .

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και στις περιπτώσεις που $f(\gamma) < f(\alpha) < f(\beta)$ ή $f(\beta) < f(\alpha) < f(\gamma)$ ή $f(\beta) < f(\gamma) < f(\alpha)$

## Πρόταση 6

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, να δείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f στο Δ υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f ΄

**Απόδειξη**

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ ($x_1 < x_2$ ) δυο ρίζες της f. Οπότε $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$, αφού

- Είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως παραγωγίσιμη
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1, x_2)$ και
- Ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$

  Άρα η f ΄ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(x_1, x_2)$

## Πρόταση 7

Έστω $f : R \to R$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f\,'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ τότε να δείξετε ότι η f είναι $1 - 1$

**Απόδειξη**

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι $1 - 1$
Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$
Αν $x_1 < x_2$ , τότε για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, αφού

- Είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως παραγωγίσιμη
- Είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1, x_2)$ και
- Ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$

Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ , τέτοιο ώστε $f\,'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο, αφού $f\,'(x) \neq 0$ , για κάθε $x \in R$. Άρα η f είναι $1 - 1$

## Πρόταση 8

Αν f ,g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$

**Απόδειξη**

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta [f(x) - g(x)]dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

## Πρόταση 9

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] . Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

**Απόδειξη**

Είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, αν υπάρχει $x_o \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_o) \neq 0$ τότε η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο [α ,β] και θα ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

## Πρόταση 10

Έστω οι συναρτήσεις f ,g είναι συνεχείς στο [α ,β] και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$ . Αν υπάρχει $x_o \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_o) \neq g(x_o)$ να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

**Απόδειξη**

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ η οποία είναι συνεχής στο [α ,β] είναι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και δεν είναι παντού μηδέν στο [α ,β]

Επομένως

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \left[f(x) - g(x)\right]dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

## Πρόταση 11

Έστω $g: R \to R$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) \neq 0$, $x \in R$.
Αν $\int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)dx = 0$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta$

**Απόδειξη**

Ισχύει $g^2$ συνεχής στο R και $g^2(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

- Αν $\alpha < \beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)dx > 0$, άτοπο
- Αν $\beta < \alpha$ τότε $\int_{\beta}^{\alpha} g^2(x)dx > 0 \Leftrightarrow -\int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)dx < 0$, άτοπο

  Άρα $\alpha = \beta$

## Πρόταση 12

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε υπάρχουν $m, M \in R$ τέτοιοι ώστε

$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$

**Απόδειξη**

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ από θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής υπάρχουν m , M έτσι ώστε

$m \leq f(x) \leq M$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M dx$ ή $m\int_{\alpha}^{\beta} 1dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M\int_{\alpha}^{\beta} 1dx$ ή

$m[x]_{\alpha}^{\beta} \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M[x]_{\alpha}^{\beta}$

ή $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$

## Πρόταση 13

Αν f συνεχής στο [α ,β] είναι $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\, f(x) \,|\, dx$

**Απόδειξη**

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ή

$\int_{\alpha}^{\beta} -|\, f(x)\,|\, dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\, f(x)\,| dx$ ή

ή $-\int_{\alpha}^{\beta} |\, f(x)\,|\, dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\, f(x)\,| dx$ ή $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\, f(x)\,|\, dx$